熱対流系への構成論的アプローチ—乱流のモデル化

東京工業大学　理学部　柳田達雄

1　はじめに

異なった現象においても類似なパターンが現れることがしばしば観察される。例えば、ラッシュ・アワー時の人と水の流れ、さざ波と砂丘、クラゲとカップに落ちたミルクが描くパターンなどなど。もしかすると隠された機構が存在しているかも知れない。もし、いくつかの異なったモデルが同じ現象 (パターン) を再現することができるとすれば、現象を理解するためには基礎方程式を解くという“シミュレーション”だけではなく、モデルを構築して如何なる時に現象を再現し、どうなると再現しなくなるかという境界を明らかにするシミュレーションも必要となる。すなわち、モデルの変化に対する定性的性質の構造安定性を調べることが現象を理解するためには必要なのではないだろうか。

このようなことを行う時、できるだけモデルが構成論的に作れたほうが良い。カップルド・マップ・ラティスでは現象の本質的な物理的要因を取り出して、それぞれの要素を簡単なダイナミクスに置き換えることによってモデルを構成する。このため、要素を交換したり、ダイナミクスを変えてみたりとモデルを容易に変化させることができるため定性的性質の構造安定性を調べるには好都合である。

また、複雑系は多くのパラメータを持っている。この多数のパラメータの変化に対する挙動を観察することも現象の理解には重要である。パラメータ変化に対する大域的な構造を調べるためには時間発展が少ない演算回数で可能なことがモデルに要求される。

2　熱対流の構成論的モデル

モデルを作るにあたって、空間を格子状 (i,j) に離散化し、格子上の状態を記述する場の変数を選ぶ。ここでは、熱対流の定性的性質を記述するために最小限必要と思われる場の変数として温度 $E(i,j)$ と速度 $\vec{v}(i,j)$ を選んだ。もちろん、流体運動を記述するためにはこれだけでは不十分であるが、ここで考慮していない変数による物理的機構は簡単な写像によって表わすことにする。

次に、熱対流に重要と思われる物理的機構として、浮力、熱拡散、粘性、圧力の効果を考慮する。浮力は温度の高い格子は上昇するというダイナミクスで表し、熱拡散、粘性は離散化した Laplace 演算子によって表現する。ここで、圧力の効果とは非圧縮性流体の条件 $\nabla\cdot\vec{v}=0$ を完全に要求する代わりに $\nabla(\nabla\cdot\vec{v})$ を離散化したダイナミクスを実行してベクトル場の発散を抑えることである。通常この条件は各時刻で毎回 Poisson 方程式を解く

ことにより満たさなくてはならないが。これには膨大な計算時間を必要とする。ここでは厳密に非圧縮条件を要求せずに局所的なダイナミクスによってベクトル場の発散を抑えている。

1. 浮力

   温度の高いサイトが上昇するダイナミクス。

$$v_y^*(x,y) = v_y^t(x,y) + \frac{c}{2}\{2E^t(x,y) - E^t(x+1,y) - E^t(x-1,y)\} \quad (1)$$

$$v_x^*(x,y) = v_x^t(x,y) \quad (2)$$

2. 熱拡散

   熱拡散は離散化した Laplacian で表現する。

$$E'(x,y) = E^t(x,y) + \kappa\Delta E^t(x,y) \quad (3)$$

   ここでΔは以下のような離散化した Laplace 演算子です。

$$\Delta A(x,y) = \{A(x+1,y) + A(x-1,y) + A(x,y+1) + A(x,y-1) - 4A(x,y)\}/4$$

3. 粘性、圧力効果

   粘性は離散化された Laplace 演算子で表す。また、非圧縮性 $\nabla\cdot\vec{v}=0$ を表現するため $\nabla(\nabla\cdot\vec{v})$ を離散化したダイナミクスを導入した。

$$v'_x(x,y) = v_x^*(x,y) + \nu\Delta v_x^*(x,y) + \eta\{(v_x^*(x+1,y) + v_x^*(x-1,y))/2 - v_x^*(x,y) +$$

$$(v_y^*(x+1,y+1) + v_y^*(x-1,y-1) - v_y^*(x-1,y+1) - v_y^*(x1,y-1))/4\} \quad (4)$$

   yに関しても同様 $[x \leftrightarrow y]$

以上の手続きを逐次実行した後、移流 ($\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}$や$\vec{v}\cdot\nabla E$) を表すために Lagrange 写像を導入する。まず、各格子上 (i,j) に準粒子を配置する。各準粒子はそこでの速度$\vec{v}(i,j)$ にしたがい $(i+v_x, j+v_y)$ に移動して場の量を運搬するが、一般には、移動した先 $(i+v_x, j+v_y)$ には格子上ではないため場の量をてこの法則に従い最近接格子に分配することにより移流を表現する。

以上の写像を合成したダイナミクス

$$\left\{\begin{array}{c}\vec{v}^t(x,y)\\ E^t(x,y)\end{array}\right\} \longmapsto \left\{\begin{array}{c}\vec{v}*(x,y)\\ E^t(x,y)\end{array}\right\} \longmapsto \left\{\begin{array}{c}\vec{v}'(x,y)\\ E'(x,y)\end{array}\right\} \stackrel{\text{Lagrange}}{\longmapsto} \left\{\begin{array}{c}\vec{v}^{t+1}(x,y)\\ E^{t+1}(x,y)\end{array}\right\}$$

によって、熱対流の時間発展を表す。

このモデルの基礎パラメーターは Rayleigh 数に対応する上面と下面の温度差（$\Delta E = E(x,0) - E(x,N_y)$）、Prandtl 数に対応する温度拡散と粘性率の比（ν/κ）、アスペクト数 (N_x/N_y) である。このような簡単なモデルにおいても、表 1のように、さまざまな熱対流の現象を再現することがでる (詳細は文献 [1][2])。

表 1: CML モデルによるシミュレーション結果と実験との比較

現象	特徴	CML モデル	実験
Onset of Convection	$v_z \sim \epsilon^{\alpha}$	$\alpha = -1/2$	$\alpha = -1/2$
Critical Slowing Down	$1/\tau \sim j^{\alpha'}$	$\alpha' = -1$	$\alpha' = -1$
Route to Chaos	Qusi-periodic	Hi Plandtl	Hi Plandtl
	Period doubling	Low Plandtl	Low Plandtl
	Intermittency	Depend on Γ	—
Chaotic Itinerancy	Lifetime at laminar states	diverges at ΔT_{CI}	—
Coherent Chaos	Spatial Long-range Order with chaotic motion	EXISTS	—
Traveling Wave	Coexistence of different speeds attractors	EXISTS	—
STI	Distribution of Laminar Domain $P(L) \sim L^{-\gamma}$ (Onset)	$\gamma = 2.0 \pm 0.2$	$\gamma = 1.8$
Soft/Hard Turbulence	Flatness	3 to 6	3 to 6
	$\langle (E - \langle E \rangle)^4 \rangle / \langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle^2$	3 to 12(Hi Prandtl)	—
Pattern Formation	characteristic length $\xi = t^{\beta}$	$\beta = 1/2$	$\beta = 1/2$

3 普遍性について

構成的に作った熱対流モデルは非常に幅広い範囲で実験と良く一致した。これらの結果はこのモデルだけの特別なものであろうか。他にも熱対流現象を再現するモデルが存在する可能性がある。そこで、我々が構成したモデルに変化を加えることにより、この事を確かめてみる。モデルの変更の仕方はいくらでも存在するので、ここでは表 2のように、浮力と圧力の効果のダイナミクスを変更することにより現象の再現性の変化を調べた。

表 2: モデル変化

浮力のダイナミクス	圧力のダイナミクス
$v_y^* = v_y^t + c\ \mathit{discretized}\ \partial^2 E/\partial x^2$	$v_x' = v_x^* + \eta\ \mathit{discretized}\ \nabla(\nabla \cdot \vec{v})$
$v_y^* = v_y^t + c\ \mathit{discretized}\ \partial^2 E/\partial y^2$	$v_x' = v_x^* - \eta \exp(-\gamma v^2)$
$v_y^* = v_y^t + c\ \mathit{discretized}\ \partial^2 E/\partial x \partial y$	$v_x' = v_x^* + \eta\ \mathit{discretized}\ \nabla^4$

熱対流臨界点、時間空間間欠運動、ソフト・ハード乱流遷移に対して、このモデル変化に対する "構造安定性" を調べた結果を表 3に示す。

熱伝導から対流が始まる臨界点での振る舞いは、ここで挙げたモデル族の範囲内では変化しない。これは、臨界点での性質は、分岐現象 (Hopf 分岐) がうまく記述できてさえいれば再現できるからだと考えられる。次に、空間自由度を持つ力学系がカオスとなる時にみられる普遍的な現象であると考えられている時間空間間欠運動について調べた。時間空間間欠運動は時空パターンのなかで大きさ L の層流 (規則的なパターン) 状態が現れる確率分布 $P(L)$ によって特徴づけられている [3]。この分布は時間空間間欠運動が起こる臨界点では冪分布となり、十分乱れた後では指数分布となる。これらの分布関数の振る舞いはモデル変化に対して変わる。つまり、モデルによっては時間空間間欠運動が再現されないことが分った。例えば、浮力のダイナミクスとして $discretized \partial^2 E/\partial y^2$を選んだ場合の時空パターンを観察すると、時間的には間欠的に乱れたパターンが現れるが、空間的な間欠性が失われてしまう。一方、圧力効果のダイナミクスは時間空間間欠運動を特徴づける確率分布に対して重要な役割を担っていない。つまり、非圧縮性の効果は時間空間間欠運動には影響を与ない。これは、時間空間間欠運動が (非圧縮性) 流体以外の現象においても観測される普遍的な振る舞いであることと対応していると考えられないだろうか。

ソフト・ハード乱流遷移は温度の確率分布によって特徴づけられる (もちろん、これだけで乱流遷移が "理解" 出来たというわけではない)。この場合には、時間空間間欠運動の時と逆に圧力効果のダイナミクスが重要な役割をはたしていることが分った。圧力効果、すなわちベクトル場の発散 $\nabla \cdot \vec{v}$を十分に抑えられないと、この遷移はうまく再現されない。もちろん、この場合でも確率分布は温度差の増加とともに変化する。それに対して、浮力のダイナミクスはこの遷移に影響を与えない。これは、この遷移が流体を駆動する外力のダイナミクスに依存しないことを示している。実際に、乱流遷移は熱対流系以外の格子生成乱流や撹拌流体においても観測されることに対応しないだろうか [4] [5]。

表 3: モデル変化に対する現象の再現性

モデル	$\partial_{xx} \cup \nabla(\nabla\vec{v})$	$\partial_{yy} \cup \nabla(\nabla\vec{v})$	$\partial_{xy} \cup \nabla(\nabla\vec{v})$	$\partial_{xx} \cup \exp(\vec{v}^2)$	$\partial_{xx} \cup \emptyset$	$\partial_{xx} \cup \nabla^4$
Onset	○	○	○	○	○	○
STI	○	+	+	○	○†	○†
SH	○	○	○	×	×	×

○ : 実験と一致。
+ : 空間的間欠性なし。
† : 分布 $P(L)$ のテイルに大きな揺らぎあり。
× : 3(ソフト領域) 周辺に停留地なし。

4 まとめ

ここで紹介した熱対流モデルは周期倍化、準周期運動などの多様なカオスへの分岐現象、時間空間間欠運動、ソフト・ハード乱流遷移、パターン形成などの幅広い現象を再現し、Prandtl 数依存性や統計的特徴も定性的によく一致する。

いろいろな自然現象に類似性があるのをみると、現象の定性的振舞いはモデルの細部によらない普遍性を持っているのではないかと想像される。したがって、定性的性質を支配しているダイナミクスを理解するためには、どのようなモデルの範囲ならばその定性的性質を再現することができるかを明かにすることが必要である。カップルド・マップ・ラティスは個々の物理的要因を一つの写像として表しているため、要素を取り除いたり、変化させたりと構成的にモデルを構築できるため虚実境界を探索する方法として有効である。実際、時間空間間欠運動は圧力のダイナミクス (流体の非圧縮性) に依存しないことが、また、乱流遷移については流体を駆動する外力には依存しないことが分った。

このように、与えられた熱対流の特徴に対してモデル族をふるいにかけ、どのようなモデルが生き残るかを見ることによって熱対流現象を理解できないだろうか?

参考文献

[1] T.Yanagita K.Kaneko. Coupled map lattice model for convection. *Phys.Lett.*, 175A:415–420, 1993.

[2] T.Yanagita K.Kaneko. Rayleigh-Bénard convection, patterns, chaos, spatiotemporal chaos and turbulent, 1994. submitted to Physica D.

[3] K.Kaneko. Spatiotemporal intermittency in coupled map lattices. *Prog. Theor. Phys.*, 74(5):1033–1044, 1985.

[4] Z.Warhaft Jeyesh. Probability distribution of a passive scalar in grid-generated turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 67:3503–3506, 1991.

[5] J.P.Gollub J.Clarke M.Gharib B.Lane O.N.Mesquita. Fluctuations and transport in a stirred fluid with a mean gradient. *Phys. Rev. Lett.*, 67:3507–3510, 1991.